Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.9 Es sei $a_n > 0$ für jedes $n \geq 0$, und es sei (a_n) konvergent gegen a oder bestimmt divergent gegen ∞. **12/4/9/1**

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Lösung zu Aufgabe 4.9 Es sei zunächst $x = 0$; dann ist die Reihe offenbar konvergent. **12/4/9/3**

Sei jetzt $x \neq 0$, ansonsten x beliebig, aber fest.

1. Fall: $a_n \longrightarrow \infty$.

Nach Voraussetzung existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| \geq 2|x|$.

Wir wenden das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x}{a_n}\right|^n} = \frac{|x|}{|a_n|} \leq \frac{|x|}{2|x|} := q < 1 \text{ für fast alle } n.$$

Folglich ist die Reihe (absolut) konvergent für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

2. Fall: $a_n \longrightarrow a$.

Wir wenden abermals das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x}{a_n}\right|^n} = \frac{|x|}{|a_n|} := (\star)$$

Ist $|x| < |a|$; $|x| + \varepsilon = |a|$ für ein $\varepsilon > 0$, dann gilt wegen $a_n \longrightarrow a$ auch $|a_n| \longrightarrow |a|$ und somit $|a_n| > |x| + \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n. Also

$$(\star) = \frac{|x|}{|a_n|} < \frac{|x|}{|x| + \frac{\varepsilon}{2}} := q < 1 \text{ für fast alle } n.$$

Für $|x| < |a|$ ist die Reihe also (absolut) konvergent.

Sei jetzt $|x| > |a|$; $|x| - \varepsilon = |a|$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist $|x| - \frac{\varepsilon}{2} \geq |a_n|$ für fast alle n, also

$$(\star) \geq \frac{|x|}{|x| - \frac{\varepsilon}{2}} > 1 \text{ für fast alle } n.$$

Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ für $|x| > |a|$ nicht konvergent.

(Bemerkung: Die Untersuchungen zeigen, daß in der Voraussetzung „$a_n > 0$“ bzw. „(a_n) divergiert bestimmt gegen ∞“ durch „$|a_n| > 0$“ bzw. „$(|a_n|)$ divergiert bestimmt gegen ∞“ ersetzt werden kann.)