

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.10 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

12/4/10/1

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n+9)^2}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für $s \in \mathbb{Q}$.
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.10 Es seien a_n, \dots, e_n die n -ten Summanden der Reihen (a) - (e). 12/4/10/2

- (a) $\sum \frac{1}{6n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$; folglich ist $\sum a_n$ divergent.
 (b) $\sum \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ ist eine konvergente Majorante von $\sum b_n$; folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.
 (c) $\sum \frac{1}{n+1}$ ist eine divergente Minorante von $\sum c_n$; folglich ist $\sum c_n$ divergent.
 (d) $\sum d_n$ ist alternierend und (d_n) eine streng monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist $\sum d_n$ konvergent.
 (e) Sei $s = \pm \frac{k}{m}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $m > 0$.
 Für $s = 0$ ist $\sum e_n$ divergent.
 Für $s = \frac{k}{m}$ ist $\sum e_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
 Für $s = -\frac{k}{m}$ ist (e_n) keine Nullfolge und somit $\sum e_n$ nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.10

12/4/10/3

- (a) Es sei $a_n := \frac{1}{6n-1}$. Wir bilden eine divergente Minorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n = \frac{1}{6n-1} \geq \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe ist bestimmt divergent gegen ∞ . Damit ist $\sum \frac{1}{6n}$ eine divergente Minorante von $\sum a_n$, folglich ist $\sum a_n$ divergent.

- (b) Es sei $a_n := \frac{1}{(8n+9)^2}$. Wir bilden eine konvergente Majorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n \leq \frac{1}{(8n+8)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{n(n+1)} := b_n.$$

Nach Aufgabe 4.4 ist $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent, folglich ist $\sum b_n$ eine konvergente Majorante von $\sum a_n$ und somit ist $\sum a_n$ konvergent.

(c) Es sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Wir bilden eine divergente Minorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} := b_n.$$

Folglich ist $\sum b_n$ eine divergente Minorante von $\sum a_n$, damit ist $\sum a_n$ divergent.

(d) Es sei $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Wegen $a_n > 0$ ist $\sum (-1)^n a_n$ alternierend.

Weiterhin ist

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

und daher ist (a_n) eine (streng) monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum (-1)^n a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

(e) Es sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n^s}$, $s = \pm \frac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{N}$ und $m > 0$.

1. Fall: $s = 0$; dann ist (a_n) keine Nullfolge und daher $\sum a_n$ nicht konvergent.

2. Fall: $s = \frac{k}{m}$, $k > 0$. Dann ist durch $n^s = \sqrt[m]{n^k}$ eine streng monoton wachsende Folge gegeben mit $n^s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$. Folglich ist $\left(\frac{1}{n^s}\right)$ eine streng monoton fallende Nullfolge. Daher ist $\sum a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

3. Fall: $s = -\frac{k}{m}$, $k > 0$. Wegen $\frac{1}{n^s} = \sqrt[m]{n^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ ist (a_n) keine Nullfolge und daher $\sum a_n$ divergent.