Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.11 Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent: **12/4/11/1**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$; $x \neq -1$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$; $x \neq 0$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.11 Seien a_n, b_n, c_n die n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/11/2**

(a) Für $|x| < 1$ ist $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|$ und somit $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $x = 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, also $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $|x| > 1$ ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

(b) Für $|x| \leq 3$ ist (b_n) keine Nullfolge und somit $\sum b_n$ nicht konvergent.
Für $|x| > 3$ ist $\lim \sqrt[n]{|b_n|} = |\frac{3}{x}|^2 < 1$. Folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) Für $|x| \geq 1$ ist (c_n) keine Nullfolge, also $\sum c_n$ divergent.
Für $|x| < 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|^{n+1} \to 0$, also $\sum c_n$ absolut konvergent.