

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.11 Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent:

12/4/11/1

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$; $x \neq -1$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$; $x \neq 0$,
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

Lösung zu Aufgabe 4.11

12/4/11/3

(a) Es sei $a_n := \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$. Wir benutzen das Quotientenkriterium.

Es ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}$. Für $|x| < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$, also

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\lim |1+x^{n+1}|} = |x| < 1.$$

Folglich ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Ist $x = 1$, so ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} := q < 1$ für alle n .

Somit ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 1$. Dann ist

$$|1+x^{n+1}| \geq |1-|x|^{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Folglich ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eine Nullfolge und somit $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Die Reihe konvergiert also für alle $x \neq -1$.

(b) Es sei $a_n := \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$ und $x \neq 0$ beliebig, aber fest.

Für $|x| \leq 3$ ist $\left|\frac{3}{x}\right| \geq 1$. Folglich ist $(|a_n|)$ keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 3$, also $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ und somit $\left|\frac{x}{3}\right|^2 < 1$. Wir benutzen das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{3}{x}\right|^{2n+1}} = \left|\frac{3}{x}\right|^2 \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{3}{x}\right|}.$$

Folglich ist

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{3}{x}\right|^2 \cdot \lim \sqrt[n]{\left|\frac{3}{x}\right|} = \left|\frac{3}{x}\right|^2 < 1.$$

Damit ist $\sum a_n$ für alle $|x| > 3$ (absolut) konvergent.

(c) Sei $a_n := x^{n!}$.

Für $|x| \geq 1$ ist (a_n) offenbar keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| < 1$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|^{n+1} \quad \text{und daher} \quad \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$$

Für $|x| < 1$ ist also $\sum a_n$ (absolut) konvergent.