Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.11 Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent: **12/4/11/1**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$; $x \neq -1$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$; $x \neq 0$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.11 Seien a_n, b_n, c_n die n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/11/2**

(a) Für $|x| < 1$ ist $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|$ und somit $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $x = 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, also $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $|x| > 1$ ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

(b) Für $|x| \leq 3$ ist (b_n) keine Nullfolge und somit $\sum b_n$ nicht konvergent.
Für $|x| > 3$ ist $\lim \sqrt[n]{|b_n|} = |\frac{3}{x}|^2 < 1$. Folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) Für $|x| \geq 1$ ist (c_n) keine Nullfolge, also $\sum c_n$ divergent.
Für $|x| < 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|^{n+1} \to 0$, also $\sum c_n$ absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.11 **12/4/11/3**

(a) Es sei $a_n := \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$. Wir benutzen das Quotientenkriterium.

Es ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}$. Für $|x| < 1$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n+1} = 0$, also

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\lim |1+x^{n+1}|} = |x| < 1.$$

Folglich ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Ist $x = 1$, so ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} := q < 1$ für alle n.

Somit ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 1$. Dann ist

$$|1+x^{n+1}| \geq \Big|1 - |x|^{n+1}\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eine Nullfolge und somit $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Die Reihe konvergiert also für alle $x \neq -1$.

(b) Es sei $a_n := \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$ und $x \neq 0$ beliebig, aber fest.

Für $|x| \leq 3$ ist $|\frac{3}{x}| \geq 1$. Folglich ist $(|a_n|)$ keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 3$, also $|\frac{x}{3}| < 1$ und somit $|\frac{x}{3}|^2 < 1$. Wir benutzen das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|^{2n+1}} = |\tfrac{3}{x}|^2 \cdot \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|}.$$

Folglich ist

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = |\tfrac{3}{x}|^2 \cdot \lim \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|} = |\tfrac{3}{x}|^2 < 1.$$

Damit ist $\sum a_n$ für alle $|x| > 3$ (absolut) konvergent.

(c) Sei $a_n := x^{n!}$.

Für $|x| \geq 1$ ist (a_n) offenbar keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| < 1$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|^{n+1} \text{ und daher } \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.$$

Für $|x| < 1$ ist also $\sum a_n$ (absolut) konvergent.