

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

- 4.13** Eine Schnecke wird auf ein 1 km langes „Gummiband“ gesetzt; sie soll das Band von Anfang bis Ende „durchlaufen“. Sie legt pro Sekunde 1 cm zurück. Nach jeder Sekunde wird jedoch das Gummiband (in seiner gesamten Länge) um 1 km ausgedehnt (die Ausdehnung soll gleichmäßig über das ganze Band erfolgen).
Frage: Wird die Schnecke jemals das Ende des Gummibandes erreichen (falls sie genügend viel Zeit zur Verfügung hat) ? 12/4/13/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.13 S_n sei die Maßzahl des Abstands der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten. Dann gilt: 12/4/13/2

$$S_n = (S_{n-1} + 1) \cdot \frac{n+1}{n} = (n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \quad (\text{induktiv überprüfen!})$$

Sei $L_n = (n+1) \cdot 100\,000$ (Maßzahl der Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten).

$L_n - S_n$ ist die Distanz der Schnecke zum Endpunkt;

$$L_n - S_n = (n+1) \left(100\,000 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert, erreicht die Schnecke ihr Ziel.