Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.13 Eine Schnecke wird auf ein 1 km langes „Gummiband“ gesetzt; sie soll das Band von Anfang bis Ende „durchlaufen“. Sie legt pro Sekunde 1 cm zurück. Nach jeder Sekunde wird jedoch das Gummiband (in seiner gesamten Länge) um 1 km ausgedehnt (die Ausdehnung soll gleichmäßig über das ganze Band erfolgen). **12/4/13/1**
Frage: Wird die Schnecke jemals das Ende des Gummibandes erreichen (falls sie genügend viel Zeit zur Verfügung hat) ?

Lösung zu Aufgabe 4.13 Sei S_n die Maßzahl des Abstandes der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten, wobei jeweils ein Schritt nach Ablauf einer Sekunde und der anschließenden Ausdehnung des Bandes beendet ist. **12/4/13/3**

Im 1. Schritt kriecht die Schnecke 1 cm und das Band wird auf das Doppelte ausgedehnt, also auch der zurückgelegte Zentimeter. Folglich ist $S_1 = 1 + 1$ (cm).

Im 2. Schritt kriecht die Schnecke abermals 1 cm; sie befindet sich vor der Ausdehnung des Bandes $S_1 + 1$ cm vom Startpunkt entfernt. Nach der Ausdehnung des Bandes auf $\frac{3}{2}$ beträgt ihr Abstand vom Ausgangspunkt $S_2 = (S_1 + 1)\cdot\frac{3}{2}$ usw.

Vor dem n-ten Schritt ist die Schnecke S_{n-1} cm vom Startpunkt entfernt. Im n-ten Schritt kommt 1 cm hinzu, und das Band wird in seiner gesamten Länge auf $\frac{n+1}{n}$ ausgedehnt, also $S_n = (S_{n-1} + 1)\cdot\frac{n+1}{n}$.

Damit gilt:

$$S_1 = 2,$$

$$S_2 = (S_1 + 1)\cdot\tfrac{3}{2} = 3\cdot(1 + \tfrac{1}{2}), \text{ und schließlich induktiv:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (S_{n-1} + 1)\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \Big(n\cdot(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}) + 1\Big)\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= (n+1)(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}). \end{aligned}$$

Es sei $L_n := (n+1)\cdot 100\,000$. Die Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten beträgt also L_n cm. Die noch durch die Schnecke zu bewältigende Distanz bis zum Endpunkt (nach n Schritten) beträgt damit $(L_n - S_n)$ cm.

Es ist

$$\begin{aligned} L_n - S_n &= (n+1)\cdot 100\,000 - (n+1)(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}) \\ &= (n+1)\Big(100\,000 - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n})\Big). \end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert gegen ∞, gibt es eine kleinste natürliche Zahl k, so daß $100\,000 - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) \leq 0$ und damit auch $L_k - S_k \leq 0$.

Im k-ten Schritt erreicht die Schnecke ihr Ziel.