

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

- 4.13** Eine Schnecke wird auf ein 1 km langes „Gummiband“ gesetzt; sie soll das Band von Anfang bis Ende „durchlaufen“. Sie legt pro Sekunde 1 cm zurück. Nach jeder Sekunde wird jedoch das Gummiband (in seiner gesamten Länge) um 1 km ausgedehnt (die Ausdehnung soll gleichmäßig über das ganze Band erfolgen).
Frage: Wird die Schnecke jemals das Ende des Gummibandes erreichen (falls sie genügend viel Zeit zur Verfügung hat) ? 12/4/13/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.13 S_n sei die Maßzahl des Abstands der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten. Dann gilt: 12/4/13/2

$$S_n = (S_{n-1} + 1) \cdot \frac{n+1}{n} = (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \quad (\text{induktiv überprüfen!})$$

Sei $L_n = (n+1) \cdot 100\,000$ (Maßzahl der Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten).

$L_n - S_n$ ist die Distanz der Schnecke zum Endpunkt;

$$L_n - S_n = (n+1)\left(100\,000 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert, erreicht die Schnecke ihr Ziel.

Lösung zu Aufgabe 4.13 Sei S_n die Maßzahl des Abstandes der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten, wobei jeweils ein Schritt nach Ablauf einer Sekunde und der anschließenden Ausdehnung des Bandes beendet ist. 12/4/13/3

Im 1. Schritt kriecht die Schnecke 1 cm und das Band wird auf das Doppelte ausgedehnt, also auch der zurückgelegte Zentimeter. Folglich ist $S_1 = 1 + 1$ (cm).

Im 2. Schritt kriecht die Schnecke abermals 1 cm; sie befindet sich vor der Ausdehnung des Bandes $S_1 + 1$ cm vom Startpunkt entfernt. Nach der Ausdehnung des Bandes auf $\frac{3}{2}$ beträgt ihr Abstand vom Ausgangspunkt $S_2 = (S_1 + 1) \cdot \frac{3}{2}$ usw.

Vor dem n -ten Schritt ist die Schnecke S_{n-1} cm vom Startpunkt entfernt. Im n -ten Schritt kommt 1 cm hinzu, und das Band wird in seiner gesamten Länge auf $\frac{n+1}{n}$ ausgedehnt, also $S_n = (S_{n-1} + 1) \cdot \frac{n+1}{n}$.

Damit gilt:

$$S_1 = 2,$$

$$S_2 = (S_1 + 1) \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right), \quad \text{und schließlich induktiv:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (S_{n-1} + 1) \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + 1\right) \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Es sei $L_n := (n+1) \cdot 100\,000$. Die Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten beträgt also L_n cm. Die noch durch die Schnecke zu bewältigende Distanz bis zum Endpunkt (nach n Schritten) beträgt damit $(L_n - S_n)$ cm.

Es ist

$$\begin{aligned}L_n - S_n &= (n + 1) \cdot 100\,000 - (n + 1) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= (n + 1) \left(100\,000 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert gegen ∞ , gibt es eine kleinste natürliche Zahl k , so daß $100\,000 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \leq 0$ und damit auch $L_k - S_k \leq 0$.

Im k -ten Schritt erreicht die Schnecke ihr Ziel.