Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

Lösung zu Aufgabe 4.14 **12/4/14/3**

(a) $z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(1-i) = 7+i.$

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1-i} = \frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$

(c) $|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

(d) $z_2^3 = (1-i)^2(1-i) = -2-2i.$

(e) $\sqrt{z_2} = \sqrt{3+4i} := a+bi.$
Wir suchen alle reellen Zahlen $a, b,$ so daß $(a+bi)^2 = 3+4i.$
Aus $\sqrt{3+4i} = a+bi$ folgt: $3+4i = a^2-b^2+2abi.$ Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2-b^2=3$ und $2ab=4.$ $b=\frac{2}{a}$ in $a^2-b^2=3$ eingesetzt, liefert schließlich die Lösungen dieser Gleichungen:

$$a = \pm 2 \text{ und } b = \pm 1, \text{ also } \sqrt{3+4i} = \pm(2+i).$$

(f) $\sqrt{z_1} = \sqrt{1-i} := a+bi;$ folglich ist $1-i = a^2-b^2+2abi.$ Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2-b^2=1$ und $2ab=-1.$ Die Lösungen der Gleichungen liefern:

$$a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})} \quad \text{und} \quad b = \mp\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}, \quad \text{also}$$

$$\sqrt{1-i} = \pm\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}\, i\Big).$$