Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.14 Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$: **12/4/14/1**

(a) $z_1 \cdot z_2$, (b) $\dfrac{z_1}{z_2}$, (c) $|z_1|$,

(d) z_2^3, (e) $\sqrt{z_2}$, (f) $\sqrt{z_1}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.14 (a) $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$. **12/4/14/2**

(b) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \cdot i$.

(c) $|z_1| = 5$.

(d) $z_2^3 = -2 - 2i$.

(e) $\sqrt{z_2} = \pm(2 + i)$.

(f) $\sqrt{z_1} = \pm\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} - \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})}} \cdot i\Big)$.

Lösung zu Aufgabe 4.14 **12/4/14/3**

(a) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(1 - i) = 7 + i$.

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$.

(c) $|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(d) $z_2^3 = (1 - i)^2(1 - i) = -2 - 2i$.

(e) $\sqrt{z_2} = \sqrt{3 + 4i} := a + bi$.
Wir suchen alle reellen Zahlen a, b, so daß $(a + bi)^2 = 3 + 4i$.
Aus $\sqrt{3 + 4i} = a + bi$ folgt: $3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2 - b^2 = 3$ und $2ab = 4$. $b = \frac{2}{a}$ in $a^2 - b^2 = 3$ eingesetzt, liefert schließlich die Lösungen dieser Gleichungen:

$$a = \pm 2 \text{ und } b = \pm 1, \text{ also } \sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i).$$

(f) $\sqrt{z_1} = \sqrt{1 - i} := a + bi$; folglich ist $1 - i = a^2 - b^2 + 2abi$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2 - b^2 = 1$ und $2ab = -1$. Die Lösungen der Gleichungen liefern:

$$a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} \quad \text{und} \quad b = \mp\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}, \quad \text{also}$$

$$\sqrt{1 - i} = \pm\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}\, i\Big).$$