Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.15 (a) Es sei $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ und $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q < 1$ für $i > n$. **12/4/15/1**

Beweisen Sie, daß $|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q}$ ist.

(b) Unter Benutzung von $\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ $(x \in \mathbb{R})$ berechne man $\mathrm{e}^{0,1}$ auf 4 Stellen genau, d.h., $|R_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0,1^i}{i!}\right| < \frac{1}{10^4}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.15 (a) Induktiv über i zeigt man $|a_{n+1+i}| \leq q^i \cdot |a_{n+1}|$. **12/4/15/2**
Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man die Behauptung.

(b) Für $a_i = \frac{x^i}{i!}$ ist $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq |x| = \frac{1}{10} := q$.

Nach (a) ist $|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}$ und somit $|a_{n+1}| < \frac{1}{9 \cdot 10^3}$.

$n = 3$ leistet das Verlangte: $\mathrm{e}^{0.1} = \sum_{i=0}^{3} \frac{0.1^i}{i!} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517.$