

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.4 Unendliche Reihen

4.15 (a) Es sei  $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$  und  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$  für  $i > n$ . 12/4/15/1

Beweisen Sie, daß  $|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q}$  ist.

(b) Unter Benutzung von  $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) berechne man  $e^{0,1}$  auf 4 Stellen

genau, d.h.,  $|R_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0,1^i}{i!} \right| < \frac{1}{10^4}$ .

#### Lösung zu Aufgabe 4.15

12/4/15/3

(a) Nach Voraussetzung ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$  für  $i > n$ . Folglich ist die unter (a) betrachtete Reihe absolut konvergent. Weiterhin ist  $|a_{i+1}| \leq q \cdot |a_i|$  für  $i > n$ .

Induktiv über  $i$  zeigt man leicht, daß  $|a_{n+1+i}| \leq q^i \cdot |a_{n+1}|$ . Damit erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$|R_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_{n+1+i}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} q^i \cdot |a_{n+1}| = |a_{n+1}| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|a_{n+1}|}{1-q}.$$

(b) Für  $a_i := \frac{x^i}{i!}$  ist

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = \frac{|x|}{i+1} \leq |x| = \frac{1}{10} := q.$$

Für alle  $i \geq 0$  gilt also  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq \frac{1}{10} = q$ .

Entsprechend der Aufgabe (a) suchen wir das kleinste  $n$ , so daß

$$|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}; \quad \text{d.h.} \quad |a_{n+1}| < \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{1}{9 \cdot 10^3}.$$

Für  $n = 2$  ist  $|a_{n+1}| = \frac{1}{3! \cdot 10^3} > \frac{1}{9 \cdot 10^3}$ .

$n = 2$  leistet also noch nicht das Verlangte.

Es sei jetzt  $n = 3$ . Dann ist

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{4! \cdot 10^4} < \frac{1}{9 \cdot 10^3}. \quad (\text{Die gesuchte Zahl } n \text{ ist } 3.)$$

Wir bilden jetzt  $\sum_{i=0}^3 \frac{0,1^i}{i!} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517$ .

Damit ist  $\left| e^{0,1} - \frac{6631}{6000} \right| < \frac{1}{10^4}$ .