Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.15 (a) Es sei $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ und $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le q < 1$ für $i > n$. **12/4/15/1**

Beweisen Sie, daß $|R_n| \le \frac{|a_{n+1}|}{1-q}$ ist.

(b) Unter Benutzung von $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ $(x \in \mathbb{R})$ berechne man $e^{0,1}$ auf 4 Stellen genau, d.h., $|R_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0,1^i}{i!}\right| < \frac{1}{10^4}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.15 (a) Induktiv über i zeigt man $|a_{n+1+i}| \le q^i |a_{n+1}|$. **12/4/15/2**

Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man die Behauptung.

(b) Für $a_i = \frac{x^i}{i!}$ ist $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \le |x| = \frac{1}{10} := q$.

Nach (a) ist $|R_n| \le \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}$ und somit $|a_{n+1}| < \frac{1}{9 \cdot 10^3}$.

$n = 3$ leistet das Verlangte: $e^{0.1} = \sum_{i=0}^{3} \frac{0.1^i}{i!} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517.$

Lösung zu Aufgabe 4.15 **12/4/15/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le q < 1$ für $i > n$. Folglich ist die unter (a) betrachtete Reihe absolut konvergent. Weiterhin ist $|a_{i+1}| \le q \cdot |a_i|$ für $i > n$. Induktiv über i zeigt man leicht, daß $|a_{n+1+i}| \le q^i \cdot |a_{n+1}|$. Damit erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$|R_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\right| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_{n+1+i}| \le \sum_{i=0}^{\infty} q^i \cdot |a_{n+1}| = |a_{n+1}| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|a_{n+1}|}{1-q}.$$

(b) Für $a_i := \frac{x^i}{i!}$ ist

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \left|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}\right| = \frac{|x|}{i+1} \le |x| = \frac{1}{10} := q.$$

Für alle $i \ge 0$ gilt also $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le \frac{1}{10} = q$.

Entsprechend der Aufgabe (a) suchen wir das kleinste n, so daß

$$|R_n| \le \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}; \quad \text{d.h.} \quad |a_{n+1}| < \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{1}{9 \cdot 10^3}.$$

Für $n = 2$ ist $|a_{n+1}| = \frac{1}{3! \cdot 10^3} > \frac{1}{9 \cdot 10^3}$.

$n = 2$ leistet also noch nicht das Verlangte.

Es sei jetzt $n = 3$. Dann ist

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{4! \cdot 10^4} < \frac{1}{9 \cdot 10^3}. \qquad \text{(Die gesuchte Zahl } n \text{ ist 3.)}$$

Wir bilden jetzt $\sum_{i=0}^{3} \frac{0,1^i}{i!} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517.$

Damit ist $\left|\mathrm{e}^{0,1} - \frac{6631}{6000}\right| < \frac{1}{10^4}$.