Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.16 Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: **12/4/16/1**

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \ \leq \ |z| \ \leq \ |a| + |b|.$$

Lösung zu Aufgabe 4.16 Es ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Wir zeigen: **12/4/16/3**

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ und
2. $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$.

Da auf beiden Seiten der Ungleichungen nur nicht-negative Größen auftreten, gilt:

1. $$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2} &\iff \tfrac{2}{4}(a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2) \leq a^2 + b^2 \\ &\iff a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \\ &\iff 0 \leq (|a| - |b|)^2; \text{ und diese Ungleichung ist korrekt.} \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| &\iff a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2 \\ &\iff 0 \leq 2|a|\cdot|b|; \text{ und dies gilt wiederum.} \end{aligned}$$