

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.17 Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene mit:

12/4/17/1

- (a) $|z + 3| \leq 2$, (b) $\operatorname{Re}(z) \geq 1$,
 (c) $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = 1$, (d) $\operatorname{Re}(z^2) = a$, (a reell).

Lösung zu Aufgabe 4.17 Im Folgenden sei $z = x + iy$. Dann gilt:

12/4/17/3

(a) $|z + 3| = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \leq 2 \iff (x + 3)^2 + y^2 \leq 4 \iff (x + 3)^2 \leq 4 - y^2$.

Wegen $0 \leq (x + 3)^2$ ist insbesondere $y^2 \leq 4$, also $|y| \leq 2$.

Weiterhin gilt: $|x + 3| \leq \sqrt{4 - y^2} \leq 2$ und $y^2 \leq 4 - (x + 3)^2$,

also $|y| \leq \sqrt{4 - (x + 3)^2}$.

1. Fall: $x + 3 \geq 0$. Dann ist $x \geq -3$ und $|x + 3| = x + 3 \leq 2$ und somit $x \leq -1$.

Also $-3 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4 - (x + 3)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x + 3)^2}$.

2. Fall: $x + 3 < 0$. Dann ist $x < -3$ und $|x + 3| = -x - 3 \leq 2$ und somit $x \geq -5$.

Also $-5 \leq x < -3$ und $-\sqrt{4 - (x + 3)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x + 3)^2}$.

Folglich ist durch $z = x + iy$ mit $-5 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4 - (x + 3)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x + 3)^2}$ die Lösungsmenge von $|z + 3| \leq 2$ gegeben.

(b) $\operatorname{Re}(z) \geq 1 \iff x \geq 1$ und y beliebig.

Folglich sind durch $z = x + iy$ mit $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig alle Lösungen von $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ gegeben.

(c) $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = 1 \iff |z - 1| = |z - 2|$ und $|z - 2| \neq 0$

$$\iff \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \text{ und } \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \neq 0$$

$$\iff (x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + y^2 \text{ und } (x - 2)^2 + y^2 \neq 0$$

$$\iff 2x = 3 \text{ und } (x \neq 2 \text{ oder } y \neq 0)$$

$$\iff x = \frac{3}{2} \text{ und } y \text{ beliebig.}$$

Durch $z = x + iy$ mit $x = \frac{3}{2}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig sind alle Lösungen von $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = 1$ gegeben.

(d) Es ist $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Folglich gilt:

$$\operatorname{Re}(z^2) = a \iff x^2 - y^2 = a$$

$$\iff y^2 = x^2 - a \quad (\geq 0)$$

$$\iff a \leq x^2 \text{ und } |y| = \sqrt{x^2 - a}.$$

Für $a \leq 0$ bzw. $a > 0$ sind durch $z = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ bzw. mit $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ alle Lösungen von $\operatorname{Re}(z^2) = a$ gegeben.