Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.17 Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene mit: **12/4/17/1**

(a) $|z+3| \leq 2,$ (b) $\mathrm{Re}(z) \geq 1,$

(c) $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1,$ (d) $\mathrm{Re}(z^2) = a,$ (a reell).

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.17 Es sei stets $z = x + iy$. **12/4/17/2**

(a) Durch $-5 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$ ist die Lösungsmenge gegeben.

(b) Mit $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig ist die Lösungsmenge gegeben.

(c) Mit $x = \frac{3}{2}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig ist die Lösungsmenge gegeben.

(d) Für $a \leq 0$ ist durch $x \in \mathbb{R}$ und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ die Lösungsmenge bestimmt; für $a > 0$ ist sie durch $|x| \leq \sqrt{a}$ und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ gegeben.

Lösung zu Aufgabe 4.17 Im Folgenden sei $z = x + iy$. Dann gilt: **12/4/17/3**

(a) $|z+3| = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \leq 2 \iff (x+3)^2 + y^2 \leq 4 \iff (x+3)^2 \leq 4 - y^2.$
Wegen $0 \leq (x+3)^2$ ist insbesondere $y^2 \leq 4,$ also $|y| \leq 2.$
Weiterhin gilt: $|x+3| \leq \sqrt{4-y^2} \leq 2$ und $y^2 \leq 4 - (x+3)^2,$
also $|y| \leq \sqrt{4-(x+3)^2}.$
1. Fall: $x + 3 \geq 0.$ Dann ist $x \geq -3$ und $|x+3| = x+3 \leq 2$ und somit $x \leq -1.$
Also $-3 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}.$
2. Fall: $x+3 < 0.$ Dann ist $x < -3$ und $|x+3| = -x-3 \leq 2$ und somit $x \geq -5.$
Also $-5 \leq x < -3$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}.$
Folglich ist durch $z = x + iy$ mit $-5 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$ die Lösungsmenge von $|z+3| \leq 2$ gegeben.

(b) $\mathrm{Re}(z) \geq 1 \iff x \geq 1$ und y beliebig.
Folglich sind durch $z = x + iy$ mit $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig alle Lösungen von $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ gegeben.

(c)
$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1 &\iff |z-1| = |z-2| \text{ und } |z-2| \neq 0 \\
&\iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \text{ und } \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \neq 0 \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2 \text{ und } (x-2)^2 + y^2 \neq 0 \\
&\iff 2x = 3 \text{ und } (x \neq 2 \text{ oder } y \neq 0) \\
&\iff x = \tfrac{3}{2} \text{ und } y \text{ beliebig.}
\end{aligned}$$

Durch $z = x+iy$ mit $x = \frac{3}{2}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig sind alle Lösungen von $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1$ gegeben.

(d) Es ist $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^2) = a &\iff x^2 - y^2 = a \\ &\iff y^2 = x^2 - a \quad (\geq 0) \\ &\iff a \leq x^2 \ \text{ und } \ |y| = \sqrt{x^2 - a}. \end{aligned}$$

Für $a \leq 0$ bzw. $a > 0$ sind durch $z = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ bzw. mit $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ und $y = \pm\sqrt{x^2 - a}$ alle Lösungen von $\mathrm{Re}(z^2) = a$ gegeben.