

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.18 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

12/4/18/1

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$

Lösung zu Aufgabe 4.18

12/4/18/3

(a) Es ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$

Folglich ist $\frac{1}{1} = 1$ der Konvergenzradius der betrachteten Reihe.

(b) Es ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$

Somit ist $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ der Konvergenzradius der Reihe.

(c) Es sei $a_n := \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}.$ Folglich ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n+2)! \cdot n! \cdot n!}{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot (2n)!} = 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} = 2 \cdot \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4.$$

Somit ist $\frac{1}{4}$ der Konvergenzradius der Reihe.