Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.19 Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die Cauchysche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n$ mit $|a| < 1$. **12/4/19/1**

(a) Man zeige: $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot a^n$.

(b) Welchen Grenzwert hat P ?

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.19 (a) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Produkt. **12/4/19/2**

(b) $P = \frac{1}{(1-a)^3}$.

Lösung zu Aufgabe 4.19 **12/4/19/3**

(a) Wir bilden das Cauchyprodukt $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihen $\sum_{n\to 0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n\to 0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n$. Nach Definition dieses Produkts gilt:

$$
\begin{aligned}
P &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a^i\cdot(j+1)\cdot a^j\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n}(j+1)\Big)\cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\Big)\cdot a^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot a^n.
\end{aligned}
$$

Also $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot a^n$.

(b) Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ und somit

$$
\frac{1}{(1-a)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} 1\Big)\cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n.
$$

Folglich ist $P = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{(1-a)^3}$.