

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.20 Man beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

12/4/20/1

Lösung zu Aufgabe 4.20 Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

12/4/20/3

Mit Hilfe des Cauchyprodukts für Reihen und des binomischen Satzes erhält man:

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \frac{y^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\nu=0}^n \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \cdot x^\nu y^{n-\nu} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$