Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.20 Man beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$. **12/4/20/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.20 Das Cauchy-Produkt von $\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ mit sich selbst liefert das Resultat. **12/4/20/2**

Lösung zu Aufgabe 4.20 Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{e}^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **12/4/20/3**

Mit Hilfe des Cauchyprodukts für Reihen und des binomischen Satzes erhält man:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \frac{y^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \cdot x^\nu y^{n-\nu} \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}
$$