Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.21 Zerlegen Sie $\exp(ix) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ in Real- und Imaginärteil $(i^2 = -1)$. **12/4/21/1**

Lösung zu Aufgabe 4.21 Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, darf die Reihe **12/4/21/3**
beliebig umgeordnet werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern.

Für gerade n, $n = 2m$, ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!} = (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Für ungerade n, $n = 2m+1$, ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m+1} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = i \cdot (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Folglich gilt:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Also

$$\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$