

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.4 Unendliche Reihen

**4.21** Zerlegen Sie  $\exp(ix) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$  in Real- und Imaginärteil ( $i^2 = -1$ ). 12/4/21/1

**Lösungshinweis zu Aufgabe 4.21** In absolut konvergenten Reihen dürfen die Glieder beliebig umgeordnet werden, ohne das Konvergenzverhalten und die Werte der Reihen zu verändern. 12/4/21/2

Wegen  $i^{2n} = (-1)^n$  und  $i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$  lassen sich die reellen und imaginären Glieder der Reihe zu neuen Reihen zusammenfassen.

**Lösung zu Aufgabe 4.21** Da  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergiert, darf die Reihe beliebig umgeordnet werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern. 12/4/21/3

Für gerade  $n$ ,  $n = 2m$ , ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!} = (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Für ungerade  $n$ ,  $n = 2m + 1$ , ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m+1} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = i \cdot (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Folglich gilt:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Also

$$\operatorname{Re}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Im}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$