

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.4 Unendliche Reihen

**4.22** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium:

12/4/22/1

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+3}.$$

#### Lösung zu Aufgabe 4.22

12/4/22/3

(a) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 2):

Es sei  $a_n \neq 0$  für jedes  $n$ . Dann gilt:

Ist  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ , für (fast) alle  $n$ , dann ist  $\sum a_n$  divergent.

Es sei  $a_n := \frac{n^n}{n!}$ . Dann ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \geq 1.$$

Folglich ist  $\sum a_n$  divergent.

(b) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 1):

Es seien  $\sum a_n, \sum b_n$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei  $a_n \leq b_n$  für (fast) alle  $n$ . Dann gilt: Ist  $\sum b_n$  konvergent, so ist auch  $\sum a_n$  konvergent.

Es sei  $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$ . Dann ist

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2} := b_n \text{ für } n \geq 2.$$

Da  $\sum b_n$  konvergiert, ist auch  $\sum a_n$  konvergent.

(c) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):

Es seien  $\sum a_n, \sum b_n$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei  $a_n \leq b_n$  für (fast) alle  $n$ . Dann gilt: Ist  $\sum a_n$  divergent, so ist auch  $\sum b_n$  divergent.

Es sei jetzt  $b_n := \frac{2n+1}{n^2}$ . Wegen  $b_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2}{n} > \frac{1}{n} := a_n$  ist die harmonische Reihe  $\sum a_n$  eine divergente Minorante von  $\sum b_n$ . Folglich ist  $\sum b_n$  divergent.

(d) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist  $\sum a_n$  alternierend und  $(|a_n|)$  eine monoton fallende Nullfolge, dann ist  $\sum a_n$  konvergent.

Es sei  $a_n := (-1)^n \cdot \frac{2}{n+3}$ . Offenbar ist  $\sum a_n$  alternierend und  $(|a_n|)$  eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist  $\sum a_n$  konvergent.