Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.22 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: **12/4/22/1**

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+3}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.22 Es seien $a_n, \ldots, d_n$ die n-ten Summanden der Reihen (a) - (d). **12/4/22/2**

(a) Das Quotientenkriterium liefert $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) $\sum \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante von $\sum b_n$, folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum c_n$, folglich ist $\sum c_n$ divergent.

(d) Die Folge $(|d_n|)$ ist streng monoton fallend; folglich ist $\sum d_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.22 **12/4/22/3**

(a) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 2):
Es sei $a_n \neq 0$ für jedes n. Dann gilt:
Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, für (fast) alle n, dann ist $\sum a_n$ divergent.
Es sei $a_n := \frac{n^n}{n!}$. Dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 1.$$

Folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 1):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum b_n$ konvergent, so ist auch $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$. Dann ist

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2} := b_n \text{ für } n \geq 2.$$

Da $\sum b_n$ konvergiert, ist auch $\sum a_n$ konvergent.

(c) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{2n+1}{n^2}$. Wegen $b_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2}{n} > \frac{1}{n} := a_n$ ist die harmonische Reihe $\sum a_n$ eine divergente Minorante von $\sum b_n$. Folglich ist $\sum b_n$ divergent.

(d) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := (-1)^n \cdot \frac{2}{n+3}$. Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum a_n$ konvergent.