

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.23 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: 12/4/23/1

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Lösung zu Aufgabe 4.23

12/4/23/3

(a) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):

Es seien $\sum a_n, \sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n . Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.

Es sei jetzt $b_n := \frac{2n+3}{n^2}$. Wegen $b_n = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} > \frac{1}{n} := a_n$ ist die harmonische Reihe $\sum a_n$ eine divergente Minorante von $\sum b_n$. Folglich ist $\sum b_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 1):

Es sei $a_n \neq 0$ für jedes n . Dann gilt: Gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so daß $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für (fast) alle n , so ist $\sum a_n$ konvergent.

Es sei $a_n := \frac{2n^2}{(n+1) \cdot 3^n}$, folglich ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{2(n+1)^2(n+1) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2) \cdot 3} \leq \frac{(n+1)^2}{3n^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} := q \text{ für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Folglich ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(c) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.

Es sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und somit $\sum (-1)^n \cdot a_n$ alternierend. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge und daher $\sum (-1)^n \cdot a_n$ konvergent.