Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.23 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: **12/4/23/1**

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.23 Es seien $a_n, \ldots, c_n$ die n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/23/2**

(a) $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$; folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Es ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \le \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^2 \le \frac{3}{4}$, folglich ist $\sum b_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

(c) Die Folge $(|c_n|)$ ist streng monoton fallend, folglich ist $\sum c_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.23 **12/4/23/3**

(a) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \le b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{2n+3}{n^2}$. Wegen $b_n = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} > \frac{1}{n} := a_n$ ist die harmonische Reihe $\sum a_n$ eine divergente Minorante von $\sum b_n$. Folglich ist $\sum b_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 1):
Es sei $a_n \neq 0$ für jedes n. Dann gilt: Gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ für (fast) alle n, so ist $\sum b_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{2n^2}{(n+1)\cdot 3^n}$, folglich ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)^2(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)\cdot 3^{n+1}\cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)\cdot 3} \le \frac{(n+1)^2}{3n^2}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{3}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 \le \frac{1}{3}\cdot\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{3}{4} := q \quad \text{für } n \ge 2.$$

Folglich ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(c) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und somit $\sum (-1)^n \cdot a_n$ alternierend. Weiterhin ist

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Folglich ist $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge und daher $\sum(-1)^n \cdot a_n$ konvergent.