Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.24 (a) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. **12/4/24/1**

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.24 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. **12/4/24/2**

(b) $\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+3}$; $\sum \frac{1}{n+3}$ ist eine divergente Minorante von $\sum \frac{n}{(n+1)^2}$.
Folglich ist die Reihe divergent.

Lösung zu Aufgabe 4.24 **12/4/24/3**

(a) Es ist $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (vgl. Aufgabe 4.4). Folglich ist

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad \text{und somit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(b) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{n}{(n+1)^2}$. Dann ist $b_n = \frac{1}{n+2+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n+3} := a_n$

Da die harmonische Reihe divergiert, ist auch $\sum a_n$ divergent und somit $\sum b_n$.