Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.25 Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz: **12/4/25/1**

(a) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(b) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{a\,n+b}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$,

(c) $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}$.

Formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium.

Lösung zu Aufgabe 4.25 **12/4/25/3**

(a) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \le b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es ist $a_n := \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \ge \frac{1}{n}$. $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$.
Folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Offenbar ist $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum a_n$ konvergent.

(c) Wir benutzen das Wurzelkriterium („Limesform"):
Es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum a_n$ konvergent;
wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.
Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|a + \frac{1}{n}\right| = |a|.$$

Für $|a| < 1$ ist $\sum a_n$ absolut konvergent, für $|a| > 1$ ist $\sum a_n$ divergent.
Für den Fall, daß $|a| = 1$ ist, sind gesonderte Untersuchungen erforderlich.
1. Fall: $a = 1$; dann ist $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$.
Folglich ist (a_n) keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.
2. Fall: $a = -1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}. \end{aligned}$$

Wegen $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und $\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ist (a_{n+1}) keine Nullfolge;
also auch für $a = -1$ ist $\sum a_n$ divergent.

Für den Fall $|a| = 1$ haben wir das folgende Kriterium benutzt:
Ist (a_n) keine Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ divergent.