Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.26 Bestimmen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen: **12/4/26/1**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n}\, x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n; \quad x \in \mathbb{R}.$ Geben Sie bei (c) das genaue Konvergenzgebiet der Reihe an.

Lösung zu Aufgabe 4.26 **12/4/26/3**

(a) Es sei $a_n := \frac{n^n}{n!}$. Dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}.$$

Folglich besitzt $\sum a_n x^n$ den Konvergenzradius $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) Es sei $b_n := \sqrt{n^n}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\sqrt{n}^{\,n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist der Konvergenzradius von $\sum b_n x^n$ null.

(c) Es sei jetzt $c_n := \frac{1}{n}$. Dann ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Somit besitzt $\sum c_n x^n$ den Konvergenzradius 1, d.h., für $|x| < 1$ ist $\sum c_n x^n$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ ist $\sum c_n x^n$ divergent.
Für $|x| = 1$ sind gesonderte Untersuchungen notwendig.
Ist $x = -1$, so erhält man die alternierende Reihe $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Ist $x = 1$, so entsteht die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Damit ergibt sich als Konvergenzgebiet $[-1, 1)$.