

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.1 Zeigen Sie mit Hilfe der ε - δ -Abschätzung, daß die Funktionen \sqrt{x} und $f \cdot g$ stetig sind, falls f und g stetig sind. 12/5/1/1

Lösung zu Aufgabe 5.1 Eine Funktion ist stetig, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist. 12/5/1/3

Wir zeigen zunächst, daß \sqrt{x} an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ stetig ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$.

1. Fall: $a = 0$. In diesem Fall wählen wir $\delta := \varepsilon^2$.

Dann gilt für alle $x \geq 0$:

Wenn $|x - 0| = |x| < \delta$, so $\sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$; also $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

2. Fall: $a > 0$. Hierfür wählen wir $\delta := \sqrt{a} \cdot \varepsilon$.

Dann gilt für alle $x \geq 0$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$.

Es seien nun $D(f), D(g)$ die Definitionsbereiche von f bzw. g und $D := D(f) \cap D(g)$. Dann ist D der Definitionsbereich von $f \cdot g$.

Es genügt zu zeigen, daß $f \cdot g$ an jeder Stelle $a \in D$ stetig ist.

Nach Voraussetzung sind f und g in a stetig. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so daß

$$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2(1 + |g(a)|)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2(1 + |f(a)|)}.$$

Dann gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, so daß für alle $x \in D$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta_1$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$ und
wenn $|x - a| < \delta_2$, so $|g(x) - g(a)| < \varepsilon_2$.

Sei jetzt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $|x - a| < \delta$, dann ist

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(x)| \cdot \varepsilon_2 + |g(a)| \cdot \varepsilon_1 \\ &= |f(x) - f(a) + f(a)| \cdot \varepsilon_2 + |g(a)| \cdot \varepsilon_1 \\ &\leq (|f(x) - f(a)| + |f(a)|) \cdot \varepsilon_2 + |g(a)| \cdot \varepsilon_1 \\ &< (1 + |f(a)|) \cdot \varepsilon_2 + (1 + |g(a)|) \cdot \varepsilon_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$