Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.1 Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Abschätzung, daß die Funktionen $\sqrt{x}$ und $f\cdot g$ stetig sind, falls f und g stetig sind. **12/5/1/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.1 Für $\sqrt{x}$ an der Stelle $a=0$ leistet $\delta := \varepsilon^2$ das Verlangte. Für $a>0$ leistet $\delta := \sqrt{a}\cdot\varepsilon$ das Verlangte. **12/5/1/2**
Sei $0<\varepsilon<1$ und $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}$. Aufgrund der Stetigkeit von f bzw. g existieren für $\varepsilon_1>0$ bzw. $\varepsilon_2>0$ entsprechende $\delta_1>0$ bzw. $\delta_2>0$. Wählt man $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$, so ist für $|x-a|<\delta$ auch $|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)|<\varepsilon$.

Lösung zu Aufgabe 5.1 Eine Funktion ist stetig, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist. **12/5/1/3**
Wir zeigen zunächst, daß $\sqrt{x}$ an jeder Stelle $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$ stetig ist. Dazu sei $\varepsilon>0$.
1. Fall: $a=0$. In diesem Fall wählen wir $\delta := \varepsilon^2$.
Dann gilt für alle $x\geq 0$:
Wenn $|x-0|=|x|<\delta$, so $\sqrt{|x|}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$; also $|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$.
2. Fall: $a>0$. Hierfür wählen wir $\delta := \sqrt{a}\cdot\varepsilon$.
Dann gilt für alle $x\geq 0$:
Wenn $|x-a|<\delta$, so $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$.
Es seien nun $D(f), D(g)$ die Definitionsbereiche von f bzw. g und $D := D(f)\cap D(g)$. Dann ist D der Definitionsbereich von $f\cdot g$.
Es genügt zu zeigen, daß $f\cdot g$ an jeder Stelle $a\in D$ stetig ist.
Nach Voraussetzung sind f und g in a stetig. Sei $0<\varepsilon<1$ und $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, so daß

$$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}.$$

Dann gibt es $\delta_1,\delta_2>0$, so daß für alle $x\in D$ gilt:

Wenn $|x-a|<\delta_1$, so $|f(x)-f(a)|<\varepsilon_1$ und
wenn $|x-a|<\delta_2$, so $|g(x)-g(a)|<\varepsilon_2$.

Sei jetzt $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$ und $|x-a|<\delta$, dann ist

$$\begin{aligned}
|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)|\\
&\leq |f(x)|\cdot|g(x)-g(a)|+|g(a)|\cdot|f(x)-f(a)|\\
&\leq |f(x)|\cdot\varepsilon_2+|g(a)|\cdot\varepsilon_1\\
&= |f(x)-f(a)+f(a)|\cdot\varepsilon_2+|g(a)|\cdot\varepsilon_1\\
&\leq (|f(x)-f(a)|+|f(a)|)\cdot\varepsilon_2+|g(a)|\cdot\varepsilon_1\\
&< (1+|f(a)|)\cdot\varepsilon_2+(1+|g(a)|)\cdot\varepsilon_1\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$