

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.2 Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus \mathbb{R} die folgende Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist: 12/5/2/1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 5.2 Im Beweis benutzen wir folgende Eigenschaften: 12/5/2/3

1. Ganz-rationale Funktionen sind stetig in \mathbb{R} .
2. f ist an der Stelle a stetig $\iff f$ besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$.
3. f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$ $\iff f$ besitzt an der Stelle a den links- und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$.

Wir betrachten zunächst die „sensiblen“ Stellen $\{0, 1, 3\}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (-x^2 + 4x - 2) = 1;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (4 - x) = 1.$$

Folglich ist f an den Stellen $0, 1, 3$ stetig. Darüber hinaus ist f in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$ stetig, da ganz-rationale Funktionen in \mathbb{R} stetig sind. f ist also in ganz \mathbb{R} stetig.