Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.2 Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{R}$ die folgende Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist: **12/5/2/1**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.2 Ganz-rationale Funktionen sind in ihren Definitionsbereichen stetig. Mit Hilfe der links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Stellen 0, 1, 3 erhält man die Stetigkeit von f an diesen Stellen. f ist also in $\mathbb{R}$ stetig. **12/5/2/2**

Lösung zu Aufgabe 5.2 Im Beweis benutzen wir folgende Eigenschaften: **12/5/2/3**

1. Ganz-rationale Funktionen sind stetig in $\mathbb{R}$.
2. f ist an der Stelle a stetig $\iff$ f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$.
3. f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$ $\iff$ f besitzt an der Stelle a den links- und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$.

Wir betrachten zunächst die „sensiblen“ Stellen $\{0, 1, 3\}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (-x^2 + 4x - 2) = 1;$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (4 - x) = 1.$$

Folglich ist f an den Stellen $0, 1, 3$ stetig. Darüber hinaus ist f in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$ stetig, da ganz-rationale Funktionen in $\mathbb{R}$ stetig sind. f ist also in ganz $\mathbb{R}$ stetig.