

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.3 Es sei $x \in \mathbb{R}$. $[x]$ bezeichne diejenige ganze Zahl mit der Eigenschaft $x - 1 < [x] \leq x$. 12/5/3/1

Man bestimme das Stetigkeitsverhalten der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$,
 (b) $f(x) = x - [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.3 (a) f ist in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig. 12/5/3/2

(b) f ist in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.

Lösung zu Aufgabe 5.3 12/5/3/3

(a) Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Offenbar ist f in dem Intervall $(k - 1, k]$ konstant und somit in dem offenen Intervall $(k - 1, k)$ stetig.

f ist an der Stelle k unstetig, denn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} [x] = k - 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > k}} [x] = k.$$

f ist also in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.

(b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Da die Funktion $[x]$ in $(k - 1, k]$ konstant ist, ist f als lineare Funktion in $(k - 1, k)$ stetig.

An der Stelle k ist f unstetig, denn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} (x - [x]) = \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} x - \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} [x] = k - (k - 1) = 1 \quad \text{und} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > k}} (x - [x]) = k - k = 0.$$

Folglich ist f in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.