Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.4 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: **12/5/4/1**
Ist f injektiv und stetig in $[a, b]$, dann ist f streng monoton in $[a, b]$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.4 Aufgrund der Injektivität ist $f(a) \neq f(b)$. Für **12/5/4/2** $f(a) < f(b)$ bzw. $f(a) > f(b)$ zeigt man leicht, daß f streng monoton wächst bzw. fällt in $[a, b]$.

Lösung zu Aufgabe 5.4 Aus der Injektivität von f in $[a, b]$ folgt $f(a) < f(b)$ oder **12/5/4/3** $f(b) < f(a)$.

1. Fall: $f(a) < f(b)$. Wir zeigen, daß f streng monoton wächst.

Angenommen, f ist in $[a, b]$ nicht streng monoton wachsend, dann existieren $a_1, a_2 \in [a, b]$ mit $a_1 < a_2$ und $f(a_1) > f(a_2)$.

Wir nehmen eine erneute Fallunterscheidung vor:

(α) $f(b) < f(a_2)$. Wegen $f(a) < f(b)$ ist $f(a) < f(a_2) < f(a_1)$.
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in (a, a_1)$, so daß $f(c) = f(a_2)$.
Das widerspricht der Injektivität von f.

(β) $f(a_2) < f(b)$; dann ist $f(a_1) < f(b)$ oder $f(b) < f(a_1)$ und schließlich

$$f(a_2) < f(a_1) < f(b) \quad \text{oder} \quad f(a_2) < f(b) < f(a_1).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in (a_2, b)$, so daß $f(c) = f(a_1)$ oder es existiert ein $c \in (a_1, a_2)$, so daß $f(c) = f(b)$. In jedem Falle erhält man einen Widerspruch zur Injektivität von f. Folglich ist f streng monoton wachsend.

2. Fall: $f(b) < f(a)$. Hierfür zeigt man völlig analog wie im ersten Fall, daß f in $[a, b]$ streng monoton fällt.