

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.6 Es sei $x \geq 0$ und

12/5/6/1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m, n \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in allen rationalen Punkten seines Definitionsbereiches nicht stetig und in allen irrationalen Punkten stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.6 Sei $a = \frac{n}{m}$, also $f(a) = \frac{1}{m}$. In jeder Umgebung 12/5/6/2

von a existiert eine Folge (a_i) von irrationalen Zahlen a_i mit $a_i \rightarrow a$ und $0 = f(a_i) = \frac{n_i}{m_i} \not\rightarrow f(a) = \frac{1}{m}$.

f ist also in a nicht stetig.

Sei a irrational, $a_i \rightarrow a$ und $\varepsilon > 0$. Für rationale $a_i = \frac{n_i}{m_i}$ gilt: $f(a_i) = \frac{1}{m_i} < \varepsilon$ für fast alle i . Für irrationale a_i gilt: $f(a_i) = 0 < \varepsilon$. Hieraus folgt die Stetigkeit von f in a .