Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.6 Es sei $x \geq 0$ und **12/5/6/1**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m},\ \ m,n \in \mathbb{N} \text{ und } m,n \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in allen rationalen Punkten seines Definitionsbereiches nicht stetig und in allen irrationalen Punkten stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.6 Sei $a = \frac{n}{m}$, also $f(a) = \frac{1}{m}$. In jeder Umgebung **12/5/6/2**
von a existiert eine Folge (a_i) von irrationalen Zahlen a_i mit $a_i \to a$ und $0 = f(a_i) = \frac{n_i}{m_i} \not\longrightarrow f(a) = \frac{1}{m}$.
f ist also in a nicht stetig.

Sei a irrational, $a_i \to a$ und $\varepsilon > 0$. Für rationale $a_i = \frac{n_i}{m_i}$ gilt: $f(a_i) = \frac{1}{m_i} < \varepsilon$ für fast alle i. Für irrationale a_i gilt: $f(a_i) = 0 < \varepsilon$. Hieraus folgt die Stetigkeit von f in a.

Lösung zu Aufgabe 5.6 Sei $a := \frac{n}{m}$ rational, also $f(a) = \frac{1}{m}$ (> 0). **12/5/6/3**

Da es in jeder Umgebung von a unendlich viele irrationale Zahlen gibt, existiert eine Folge (a_i) von irrationalen Zahlen mit $a_i \to a$.

Wegen $f(a_i) = 0$ für alle i konvergiert die Folge $(f(a_i))$ nicht gegen $f(a)$.
Folglich ist f an der Stelle a nicht stetig.

Es sei nun a irrational und $a_i \to a$. Weiterhin sei $c > 0$ (beliebig) und $\varepsilon > 0$.

Offenbar gibt es nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Folglich existieren auch nur endlich viele $\frac{n}{m} \in (0, c)$, so daß $m \leq \frac{1}{\varepsilon}$ (denn $\frac{n}{m} < c \iff n < mc$), d.h., für fast alle $\frac{n}{m} \in (0, c)$ ist $m > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

Für die irrationalen Folgeglieder a_i ist $f(a_i) = 0$. Für die rationalen $a_i := \frac{n_i}{m_i}$ (die alle in einem hinreichend großen Intervall $(0, c)$ liegen) ist $f(a_i) = \frac{1}{m_i} < \varepsilon$ für fast alle i.

Somit gilt: $f(a_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 = f(a)$; folglich ist f in a stetig.