

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.7 Man untersuche, ob die folgenden Funktionen Umkehrfunktionen besitzen und bestimme sie ggf.: 12/5/7/1

- (a)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  für  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ,  
 (b)  $f(x) = e^{x^2}$  für  $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  
 (c)  $f(x) = \sqrt{2x-1}$  für  $f : [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ .

**Lösung zu Aufgabe 5.7** Eine injektive Funktion  $f : M \rightarrow N$  besitzt eine Umkehrfunktion  $f^{-1} : N \rightarrow M$ . 12/5/7/3

Für alle  $x \in M$  und  $y \in N$  gilt:  $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ .

Um die Umkehrfunktion zu berechnen, ist also die Gleichung  $f(x) = y$  nach  $x$  aufzulösen. Will man Funktion und Umkehrfunktion mit Hilfe des gleichen  $x$ - $y$ -Koordinatensystems darstellen, sind die Variablen  $x, y$  in der Gleichung  $f^{-1}(y) = x$  zu vertauschen, so daß sich für  $f^{-1} := g$  als Umkehrfunktion  $y = g(x)$  ergibt.

(a) Wir zeigen zunächst, daß  $f$  injektiv ist. Dazu seien  $x_1, x_2 \geq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \\ &\iff x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Wir lösen die Gleichung  $f(x) = \frac{x}{x+1} = y$  nach  $x$  auf. Es ist

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x+1} &\iff y(x+1) - x = 0 \\ &\iff x(y-1) + y = 0 \\ &\iff x = -\frac{y}{y-1}. \end{aligned}$$

Durch  $x = f^{-1}(y) = -\frac{y}{y-1}$  bzw.  $y = g(x) = -\frac{x}{x-1}$  ist die gesuchte Umkehrfunktion von  $f$  gegeben.

(b) Offenbar ist  $f$  streng monoton wachsend, folglich ist  $f$  injektiv. Wir lösen jetzt die Gleichung  $y = e^{x^2}$  nach  $x$  auf. Für  $x \geq 0$  ist

$$\begin{aligned} y = e^{x^2} &\iff \ln y = x^2 \cdot \ln e = x^2 \\ &\iff x = \sqrt{\ln y}. \quad (x \text{ ist nicht negativ !}) \end{aligned}$$

Also durch  $x = f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y}$  bzw.  $y = g(x) = \sqrt{\ln x}$  ist die Umkehrfunktion von  $f$  gegeben.

(c)  $f$  ist wiederum streng monoton wachsend und somit injektiv. Für  $x \geq \frac{1}{2}$  lösen wir die Gleichung  $y = \sqrt{2x-1}$  nach  $x$  auf. Es ist

$$y = \sqrt{2x-1} \iff y^2 = 2x-1 \iff x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Durch  $x = f^{-1}(y) = \frac{y^2+1}{2}$  bzw.  $y = g(x) = \frac{x^2+1}{2}$  ist die Umkehrfunktion von  $f$  dargestellt.