Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.7 Man untersuche, ob die folgenden Funktionen Umkehrfunktionen besitzen und bestimme sie ggf.: **12/5/7/1**

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ für $f : [0, \infty) \to [0, 1)$,

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ für $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$,

(c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ für $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to [0, \infty)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.7 In jedem Fall besitzt f eine Umkehrfunktion g. Es gilt: **12/5/7/2**

(a) $g(x) = -\frac{x}{x-1}$.

(b) $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

(c) $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5.7 Eine injektive Funktion $f : M \to N$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : N \to M$. **12/5/7/3**
Für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.

Um die Umkehrfunktion zu berechnen, ist also die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen. Will man Funktion und Umkehrfunktion mit Hilfe des gleichen x-y-Koordinatensystems darstellen, sind die Variablen x, y in der Gleichung $f^{-1}(y) = x$ zu vertauschen, so daß sich für $f^{-1} := g$ als Umkehrfunktion $y = g(x)$ ergibt.

(a) Wir zeigen zunächst, daß f injektiv ist. Dazu seien $x_1, x_2 \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \\ &\iff x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Wir lösen die Gleichung $f(x) = \frac{x}{x+1} = y$ nach x auf. Es ist

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x+1} &\iff y(x+1) - x = 0 \\ &\iff x(y-1) + y = 0 \\ &\iff x = -\frac{y}{y-1}. \end{aligned}$$

Durch $x = f^{-1}(y) = -\frac{y}{y-1}$ bzw. $y = g(x) = -\frac{x}{x-1}$ ist die gesuchte Umkehrfunktion von f gegeben.

(b) Offenbar ist f streng monoton wachsend, folglich ist f injektiv.
Wir lösen jetzt die Gleichung $y = \mathrm{e}^{x^2}$ nach x auf. Für $x \geq 0$ ist

$$y = \mathrm{e}^{x^2} \iff \ln y = x^2 \cdot \ln \mathrm{e} = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\ln y}. \quad (x \text{ ist nicht negativ !})$$

Also durch $x = f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y}$ bzw. $y = g(x) = \sqrt{\ln x}$ ist die Umkehrfunktion von f gegeben.

(c) f ist wiederum streng monoton wachsend und somit injektiv. Für $x \geq \frac{1}{2}$ lösen wir die Gleichung $y = \sqrt{2x-1}$ nach x auf. Es ist

$$y = \sqrt{2x-1} \Longleftrightarrow y^2 = 2x - 1 \Longleftrightarrow x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Durch $x = f^{-1}(y) = \frac{y^2+1}{2}$ bzw. $y = g(x) = \frac{x^2+1}{2}$ ist die Umkehrfunktion von f dargestellt.