

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.8 Berechnen Sie:

12/5/8/1

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}).$$

Lösung zu Aufgabe 5.8

12/5/8/3

(a) Für $x \neq 3$ ist $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$. Folglich ist

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.$$

(b) Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

(c) Für $x > 0$ ist

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Wegen $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(d) Für $x > 0$ ist

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} &= \frac{x + \sqrt{x} - (x - \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$$