Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.8 Berechnen Sie: **12/5/8/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\,\right)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.8 (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6.$ **12/5/8/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \frac{1}{2}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = 1.$

Lösung zu Aufgabe 5.8 **12/5/8/3**

(a) Für $x \neq 3$ ist $\dfrac{x^2-9}{x-3} = x+3$. Folglich ist

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

(b) Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

(c) Für $x > 0$ ist

$$\sqrt{x^2+x}-x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.$$

Wegen $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(d) Für $x > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} &= \frac{x+\sqrt{x}-(x-\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \\
&= \frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}.
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=1.$$