Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.9 (a) Zeigen Sie, daß die Funktionen **12/5/9/1**

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{mit} \quad f : [0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$g(x) = \log_a x \quad \text{mit} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$h(x) = \arcsin x \quad \text{mit} \quad h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

stetig sind.

(b) In welchem Intervall ist $f(x) = \sqrt[n]{|\log_a(\arcsin x)|}$ stetig und warum ?

Lösung zu Aufgabe 5.9 **12/5/9/3**

(a) Wir benutzen folgende Eigenschaft:
Ist $f : M \to N$ injektiv und stetig, dann ist $f^{-1} : N \to M$ stetig.

(α) Wir betrachten die Funktion $f_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f_1(x) = x^n$.
Offenbar ist f_1 injektiv und stetig. Folglich ist auch $f = f_1^{-1}$ stetig.

(β) Für $0 < a \neq 1$ sei $g_1(x) = a^x$. Dann ist $g_1 : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ streng monoton (also injektiv) und stetig. Somit ist auch $g(x) = \log_a x$ stetig.

(γ) Es sei $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $h_1(x) = \sin x$. Dann ist $h_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ injektiv und stetig und somit $h(x) = \arcsin x$ stetig.

(b) Wir bestimmen zunächst den Definitionsbereich $D(f)$ von f.
Es ist $D(\arcsin) = [-1, 1]$ und der Wertebereich von arcsin ist $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiterhin ist $D(\log_a) = (0, \infty)$. Damit ergibt sich $D(\log_a \circ \arcsin) = (0, 1]$. Das Vorzeichen von $\log_a(\arcsin x)$ spielt keine Rolle, da unter der Wurzel der Betrag genommen wird. Somit erhält man $D(f) = (0, 1]$. In diesem Intervall ist f auch stetig, da die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.