

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.9 (a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

12/5/9/1

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{mit } f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x) = \log_a x \quad \text{mit } g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(x) = \arcsin x \quad \text{mit } h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig sind.

(b) In welchem Intervall ist  $f(x) = \sqrt[n]{|\log_a(\arcsin x)|}$  stetig und warum ?

**Lösungshinweis zu Aufgabe 5.9** (a) Da die Umkehrfunktionen von (injektiven) stetigen Funktionen stetig sind, 12/5/9/2

gilt die Behauptung.

(b) Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig. Folglich ist  $f$  in  $D(f)$  stetig und es ist  $D(f) = (0, 1]$ .

#### Lösung zu Aufgabe 5.9

12/5/9/3

(a) Wir benutzen folgende Eigenschaft:

Ist  $f : M \rightarrow N$  injektiv und stetig, dann ist  $f^{-1} : N \rightarrow M$  stetig.

( $\alpha$ ) Wir betrachten die Funktion  $f_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $f_1(x) = x^n$ .

Offenbar ist  $f_1$  injektiv und stetig. Folglich ist auch  $f = f_1^{-1}$  stetig.

( $\beta$ ) Für  $0 < a \neq 1$  sei  $g_1(x) = a^x$ . Dann ist  $g_1 : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  streng monoton (also injektiv) und stetig. Somit ist auch  $g(x) = \log_a x$  stetig.

( $\gamma$ ) Es sei  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  und  $h_1(x) = \sin x$ . Dann ist  $h_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  injektiv und stetig und somit  $h(x) = \arcsin x$  stetig.

(b) Wir bestimmen zunächst den Definitionsbereich  $D(f)$  von  $f$ .

Es ist  $D(\arcsin) = [-1, 1]$  und der Wertebereich von  $\arcsin$  ist  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Weiterhin ist  $D(\log_a) = (0, \infty)$ . Damit ergibt sich  $D(\log_a \circ \arcsin) = (0, 1]$ . Das Vorzeichen von  $\log_a(\arcsin x)$  spielt keine Rolle, da unter der Wurzel der Betrag genommen wird. Somit erhält man  $D(f) = (0, 1]$ . In diesem Intervall ist  $f$  auch stetig, da die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.