Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.10 Es sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 < 2, \\ 1 & \text{für } x^2 > 2 \end{cases}$ mit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. **12/5/10/1**
Beweisen Sie, daß f stetig ist in $\mathbb{Q}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.10 Mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit läßt sich die Stetigkeit von f an jeder Stelle $r \in \mathbb{Q}$ zeigen. Dabei ist die Fallunterscheidung $|r| < \sqrt{2}$ bzw. $|r| > \sqrt{2}$ hilfreich. **12/5/10/2**

Lösung zu Aufgabe 5.10 Sei r rational und $\varepsilon > 0$. **12/5/10/3**
1. Fall: $r < -\sqrt{2}$. Dann ist $r^2 > 2$ und somit $f(r) = 1$.
Wir wählen $\delta > 0$, jedoch so klein, daß $r + \delta < -\sqrt{2}$. Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt dann:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon.$$

2. Fall: $-\sqrt{2} < r < \sqrt{2}$, also $r^2 < 2$ und somit $f(r) = 0$.
Es sei $\delta > 0$, jedoch so klein, daß $-\sqrt{2} < r - \delta$ und $r + \delta < \sqrt{2}$. Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 0 - 0 = 0 < \varepsilon.$$

3. Fall: $\sqrt{2} < r$, also $r^2 > 2$ und damit $f(r) = 1$.
Sei $\delta > 0$ und $\sqrt{2} < r - \delta$. Für $x \in \mathbb{Q}$ erhält man:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon.$$

Folglich ist f an allen Stellen $r \in \mathbb{Q}$ stetig.