

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.11 Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in  $a$  stetig sind:

12/5/11/1

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} & \text{für } x \neq -1; 2, \\ \frac{4}{3} & \text{für } x = -1, \quad a = -1, \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \quad a = 0. \end{cases}$$

#### Lösung zu Aufgabe 5.11

12/5/11/3

(a) Für  $x \neq -1; 2$  ist  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$ .

Für  $a = -1$  gilt dann:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-3}{x-2} = \frac{4}{3} = f(a).$$

Damit ist  $f$  an der Stelle  $a = -1$  stetig.

(b) Wir betrachten die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad f(x_n) = \cos \frac{1}{x_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0 \quad \text{für alle } n.$$

Also  $f(x_n) = 0 \neq 1 = f(0)$ . Folglich ist  $f$  an der Stelle  $a = 0$  nicht stetig.