Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.11 Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in a stetig sind: **12/5/11/1**

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} & \text{für } x \neq -1; 2, \\ \frac{4}{3} & \text{für } x = -1, \quad a = -1, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \quad a = 0. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.11 (a) Es ist $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$; folglich ist f in -1 stetig. **12/5/11/2**

(b) Für $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ gilt: $x_n \to 0$, aber $f(x_n) \not\to f(0)$.
Folglich ist f in 0 nicht stetig.

Lösung zu Aufgabe 5.11 **12/5/11/3**

(a) Für $x \neq 1; 2$ ist $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$.
Für $a = -1$ gilt dann:
$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to a} \frac{x-3}{x-2} = \frac{4}{3} = f(a).$$
Damit ist f an der Stelle $a = -1$ stetig.

(b) Wir betrachten die Folge (x_n) mit $x_n := \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ und } f(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = \cos(\tfrac{\pi}{2}+n\pi) = 0 \text{ für alle } n.$$
Also $f(x_n) = 0 \neq 1 = f(0)$. Folglich ist f an der Stelle $a = 0$ nicht stetig.