Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.13 Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ auf Stetigkeit. **12/5/13/1**

Lösung zu Aufgabe 5.13 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. **12/5/13/3**

1. Fall: $x < 0$. Es ist

$$\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \frac{n^{2x} - 1}{n^{2x} + 1},$$

und wegen $2x < 0$ ist $n^{2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} = 0$. Folglich erhält man

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x} - 1}{n^{2x} + 1} = -1.$$

2. Fall: $x = 0$; also $\frac{n^0 - n^0}{n^0 + n^0} = 0$ und somit $f(0) = 0$.

3. Fall: $x > 0$. Es ist

$$\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}}.$$

Wegen $-2x < 0$ ist $n^{-2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Folglich ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = 1.$$

Damit ist f offenbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und an der Stelle 0 unstetig.