Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.14 Es sei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$. **12/5/14/1**

(a) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich von f an.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 5.14 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. **12/5/14/3**

1. Fall: $|x| < 1$. Dann ist $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und somit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1.$$

2. Fall: $|x| > 1$. Hierfür gilt: $|x^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ und somit $\dfrac{1}{1+x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Folglich ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 0.$$

3. Fall: $x = -1$. Für ungerade n ist $x^n = -1$ und somit $\dfrac{1}{1+x^n}$ nicht definiert; also $-1 \notin D(f)$.

4. Fall: $x = 1$. Hierfür ist $\dfrac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$, also $f(1) = \frac{1}{2}$.

(a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und der Wertebereich $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b) Für $|x| < 1$ bzw. $|x| > 1$ ist f konstant 1 bzw. konstant 0. Folglich ist f dort stetig.
An der Stelle $x = 1$ besitzt f keinen Grenzwert (links- und rechstsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein); an der Stelle $x = -1$ ist f nicht definiert. Somit ist f in $\{-1, 1\}$ nicht stetig.