

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

- 5.14** Es sei  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}$ . 12/5/14/1
- (a) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich von  $f$  an.
- (b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die Funktion  $f$  stetig bzw. nicht stetig ist.

**Lösungshinweis zu Aufgabe 5.14** (a)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $W(f) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ . 12/5/14/2

(b)  $f$  ist in  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  stetig und in  $\{-1, 1\}$  nicht stetig (in -1 nicht definiert).

**Lösung zu Aufgabe 5.14** Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. 12/5/14/3

1. Fall:  $|x| < 1$ . Dann ist  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und somit

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = 1.$$

2. Fall:  $|x| > 1$ . Hierfür gilt:  $|x^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und somit  $\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Folglich ist

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = 0.$$

3. Fall:  $x = -1$ . Für ungerade  $n$  ist  $x^n = -1$  und somit  $\frac{1}{1+x^n}$  nicht definiert; also  $-1 \notin D(f)$ .

4. Fall:  $x = 1$ . Hierfür ist  $\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$ , also  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

- (a) Der Definitionsbereich von  $f$  ist  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  und der Wertebereich  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ .
- (b) Für  $|x| < 1$  bzw.  $|x| > 1$  ist  $f$  konstant 1 bzw. konstant 0. Folglich ist  $f$  dort stetig.  
An der Stelle  $x = 1$  besitzt  $f$  keinen Grenzwert (links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein); an der Stelle  $x = -1$  ist  $f$  nicht definiert. Somit ist  $f$  in  $\{-1, 1\}$  nicht stetig.