

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

- 5.15** (a) Es sei  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt[3]{3x + 4}$  mit  $f : [\sqrt{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . 12/5/15/1  
Beweisen Sie, daß es ein  $a \in [\sqrt{2}, \infty)$  gibt, so daß  $f(a) = 7$ .
- (b) Beweisen Sie: Ist  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig, dann gibt es ein  $x \in [a, b]$ ,  
so daß  $f(x) = x$ .

**Lösungshinweis zu Aufgabe 5.15** (a)  $f$  ist stetig und  $f(2) < 7 < f(8)$ . Mit dem 12/5/15/2  
Zwischenwertsatz erhält man die  
Behauptung.

- (b) Für  $f(a) = a$  oder  $f(b) = b$  ist die Behauptung trivial.  
Sei nun  $f(a) > a$  (für  $f(b) < b$  verläuft der Beweis analog) und  $M$  eine Menge,  
die wie folgt definiert ist:  
 $x \in M \iff x \in [a, b]$  und für jedes  $y$  mit  $a \leq y \leq x$  ist  $f(y) > y$ .  
Auf  $M$  wird der Satz von der oberen Grenze angewendet.